

# Оглавление

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Возмущения по параметру . . . . .	10
1.1.1. Алгебраическое уравнение . . . . .	10
1.1.2. Осциллятор Ван-дер-Поля . . . . .	11
1.2. Возмущения по координате . . . . .	13
1.2.1. Уравнение Бесселя нулевого порядка . . . . .	13
1.2.2. Простой пример . . . . .	15
1.3. Символы порядка и калибровочные функции . . . . .	15
1.4. Асимптотические разложения и последовательности . . . . .	18
1.4.1. Асимптотические ряды . . . . .	18
1.4.2. Асимптотические разложения . . . . .	21
1.4.3. Единственность асимптотических разложений . . . . .	23
1.5. Сравнение сходящегося и асимптотического рядов . . . . .	24
1.6. Неравномерные разложения . . . . .	25
1.7. Простейшие действия над асимптотическими разложениями . . . . .	28
Упражнения . . . . .	29
<b>Глава 2. Прямые разложения и источники неравномерности . . . . .</b>	<b>33</b>
2.1. Бесконечные области . . . . .	34
2.1.1. Уравнение Дюффинга . . . . .	34
2.1.2. Модель слабой нелинейной неустойчивости . . . . .	35
2.1.3. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла . . . . .	36
2.1.4. Обтекание сферы при малых числах Рейнольдса . . . . .	39
2.2. Малый параметр при старшей производной . . . . .	41
2.2.1. Пример второго порядка . . . . .	41
2.2.2. Обтекание тела при больших числах Рейнольдса . . . . .	43
2.2.3. Релаксационные колебания . . . . .	45
2.2.4. Несимметричный изгиб предварительно напряженных кольцевых пластин . . . . .	46
2.3. Изменение типа дифференциального уравнения в частных производных . . . . .	48
2.3.1. Простой пример . . . . .	48
2.3.2. Длинные волны на поверхности жидкости, стекающей по наклонной плоскости . . . . .	49
2.4. Наличие особенностей . . . . .	53
2.4.1. Сдвиг особенностей . . . . .	53
2.4.2. Задача о космическом корабле Земля—Луна . . . . .	54
2.4.3. Термоупругие поверхностные волны . . . . .	56
2.4.4. Задача с точкой возврата . . . . .	59
2.5. Роль координатных систем . . . . .	60
Упражнения . . . . .	63
<b>Глава 3. Метод растянутых координат . . . . .</b>	<b>67</b>
3.1. Метод растянутых параметров . . . . .	69
3.1.1. Метод Линдштедта—Пуанкаре . . . . .	69

3.1.2. Переходные кривые для уравнения Матьё . . . . .	71
3.1.3. Характеристические показатели для уравнения Матьё (метод Уиттекера) . . . . .	74
3.1.4. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел . . . . .	76
3.1.5. Характеристические показатели для треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел . . . . .	79
3.1.6. Простая линейная задача на собственные значения . . . . .	81
3.1.7. Квазилинейная задача на собственные значения . . . . .	84
3.1.8. Квазилинейное уравнение Клейна—Гордона . . . . .	89
3.2. Метод Лайтхилла . . . . .	90
3.2.1. Дифференциальное уравнение первого порядка . . . . .	92
3.2.2. Одномерная задача о космическом корабле Земля—Луна . . . . .	96
3.2.3. Твердый цилиндр, равномерно расширяющийся в неподвижном воздухе . . . . .	97
3.2.4. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла . . . . .	100
3.2.5. Разложения с использованием точных характеристик: нелинейные упругие волны . . . . .	103
3.3. Метод Темпла . . . . .	108
3.4. Метод перенормировки . . . . .	109
3.4.1. Уравнение Дюффинга . . . . .	110
3.4.2. Модель слабо нелинейной неустойчивости . . . . .	110
3.4.3. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла . . . . .	111
3.4.4. Сдвиг особенности . . . . .	112
3.5. Ограничения метода растянутых координат . . . . .	113
3.5.1. Пример слабо нелинейной неустойчивости . . . . .	114
3.5.2. Малый параметр при высшей производной . . . . .	115
3.5.3. Задача о космическом корабле Земля—Луна . . . . .	117
Упражнения . . . . .	118
<b>Глава 4. Метод сращения асимптотических разложений и составные разложения . . . . .</b>	<b>124</b>
4.1. Метод сращения асимптотических разложений . . . . .	125
4.1.1. Введение: метод Прандтля . . . . .	125
4.1.2. Высшие приближения и усовершенствованные процедуры сращения . . . . .	128
4.1.3. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами . . . . .	136
4.1.4. Уравнение Рейнольдса для скользящей опоры . . . . .	140
4.1.5. Несимметричный изгиб предварительно напряженных кольцевых пластин . . . . .	142
4.1.6. Термоупругие поверхностные волны . . . . .	148
4.1.7. Задача о космическом корабле Земля—Луна . . . . .	151
4.1.8. Обтекание сферы при малых числах Рейнольдса . . . . .	154
4.2. Метод составных разложений . . . . .	159
4.2.1. Уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	160
4.2.2. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами . . . . .	163
4.2.3. Краевая задача с начальными условиями для уравнения теплопроводности . . . . .	166
4.2.4. Ограничения метода составных разложений . . . . .	168
Упражнения . . . . .	170
<b>Глава 5. Вариация произвольных постоянных и метод усреднения . . . . .</b>	<b>174</b>
5.1. Вариация произвольных постоянных . . . . .	175
5.1.1. Решения уравнения Шредингера, зависящие от времени . . . . .	175
5.1.2. Пример нелинейной устойчивости . . . . .	177

5.2. Метод усреднения . . . . .	180
5.2.1. Методика Ван-дер-Поля . . . . .	180
5.2.2. Методика Крылова—Боголюбова . . . . .	181
5.2.3. Обобщенный метод усреднения . . . . .	183
5.3. Методика Страбла . . . . .	187
5.4. Методика Крылова—Боголюбова—Митропольского . . . . .	189
5.4.1. Уравнение Дюффинга . . . . .	190
5.4.2. Осциллятор Ван-дер-Поля . . . . .	192
5.4.3. Уравнение Клейна—Гордона . . . . .	193
5.5. Метод усреднения с использованием канонических переменных . . . . .	195
5.5.1. Уравнение Дюффинга . . . . .	198
5.5.2. Уравнение Матьё . . . . .	199
5.5.3. Качающаяся пружина . . . . .	201
5.6. Методика фон Цайпеля . . . . .	205
5.6.1. Уравнение Дюффинга . . . . .	208
5.6.2. Уравнение Матьё . . . . .	210
5.7. Усреднение с использованием рядов и преобразований Ли . . . . .	216
5.7.1. Ряды и преобразования Ли . . . . .	217
5.7.2. Обобщенные алгоритмы . . . . .	218
5.7.3. Упрощенные общие алгоритмы . . . . .	223
5.7.4. Схема процедуры . . . . .	225
5.7.5. Алгоритмы для канонических систем . . . . .	229
5.8. Усреднение с использованием лагранжианов . . . . .	233
5.8.1. Модель диспергирующих волн . . . . .	234
5.8.2. Модель взаимодействия волна—волна . . . . .	237
5.8.3. Нелинейное уравнение Клейна—Гордона . . . . .	239
Упражнения . . . . .	240
<b>Глава 6. Метод многих масштабов . . . . .</b>	<b>245</b>
6.1. Описание метода . . . . .	245
6.1.1. Метод многих переменных (процедура разложения производной) . . . . .	254
6.1.2. Процедура разложения по двум переменным . . . . .	258
6.1.3. Обобщенный метод—нелинейные масштабы . . . . .	259
6.2. Приложения метода разложения производной . . . . .	262
6.2.1. Уравнение Дюффинга . . . . .	262
6.2.2. Осциллятор Ван-дер-Поля . . . . .	264
6.2.3. Вынужденные колебания осциллятора Ван-дер-Поля . . . . .	267
6.2.4. Параметрический резонанс—уравнение Матьё . . . . .	272
6.2.5. Осциллятор Ван-дер-Поля с запаздывающей амплитудой . . . . .	276
6.2.6. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел . . . . .	279
6.2.7. Качающаяся пружина . . . . .	281
6.2.8. Модель для слабой нелинейной неустойчивости . . . . .	284
6.2.9. Модель взаимодействия волна—волна . . . . .	286
6.2.10. Ограничения метода разложения производной . . . . .	288
6.3. Процедура разложения по двум переменным . . . . .	290
6.3.1. Уравнение Дюффинга . . . . .	290
6.3.2. Осциллятор Ван-дер-Поля . . . . .	292
6.3.3. Устойчивость треугольных точек в эллиптической ограниченной задаче трех тел . . . . .	295
6.3.4. Ограничения рассматриваемой методики . . . . .	296
6.4. Обобщенный метод . . . . .	296
6.4.1. Уравнение второго порядка с переменными коэффициентами . . . . .	296
6.4.2. Общее уравнение второго порядка с переменными коэффициентами . . . . .	301
6.4.3. Линейный осциллятор с медленно меняющейся восстанавливающей силой . . . . .	303

6.4.4. Пример с точкой возврата . . . . .	305
6.4.5. Уравнение Дюффинга с медленно меняющимися коэффициентами . . . . .	308
6.4.6. Динамика входа . . . . .	312
6.4.7. Задача о космическом корабле типа Земля—Луна . . . . .	316
6.4.8. Модель диспергирующих волн . . . . .	319
6.4.9. Нелинейное уравнение Клейна—Гордона . . . . .	322
6.4.10. Преимущества и ограничения обобщенного метода . . . . .	324
Упражнения . . . . .	325
<b>Глава 7. Асимптотические решения линейных уравнений . . . . .</b>	<b>329</b>
7.1. Дифференциальные уравнения второго порядка . . . . .	330
7.1.1. Разложения в окрестности нерегулярной особенности . . . . .	330
7.1.2. Разложение функции Бесселя нулевого порядка для больших значений аргумента . . . . .	334
7.1.3. Задача Лиувилля . . . . .	336
7.1.4. Высшие приближения для уравнений, содержащих большой параметр . . . . .	337
7.1.5. Малый параметр при старшей производной . . . . .	339
7.1.6. Однородные задачи с медленно меняющимися коэффициентами . . . . .	340
7.1.7. Динамика входа снаряда . . . . .	342
7.1.8. Неоднородные задачи с медленно меняющимися коэффициентами . . . . .	343
7.1.9. Последовательные приближения Лиувилля—Грина (ВКБ-приближения) . . . . .	346
7.2. Системы обыкновенных уравнений первого порядка . . . . .	348
7.2.1. Разложение в окрестности иррегулярной особой точки . . . . .	348
7.2.2. Асимптотическое разбиение систем уравнений . . . . .	349
7.2.3. Субнормальные решения . . . . .	353
7.2.4. Системы, содержащие параметр . . . . .	355
7.2.5. Однородные системы с медленно меняющимися коэффициентами . . . . .	356
7.3. Задачи с точкой возврата . . . . .	358
7.3.1. Метод сращивания асимптотических разложений . . . . .	359
7.3.2. Преобразование Лангера . . . . .	363
7.3.3. Задачи с двумя точками возврата . . . . .	366
7.3.4. Задачи с точками возврата высших порядков . . . . .	369
7.3.5. Высшие приближения . . . . .	370
7.3.6. Неоднородная задача с простой точкой возврата—первое приближение . . . . .	376
7.3.7. Неоднородная задача с простой точкой возврата—высшие приближения . . . . .	378
7.3.8. Неоднородная задача с точкой возврата второго порядка . . . . .	382
7.3.9. Задачи с особенностями в точках возврата . . . . .	383
7.3.10. Задачи высшего порядка с точками возврата . . . . .	385
7.4. Волновые уравнения . . . . .	386
7.4.1. Разложение Борна—Неймана и диаграммы Фейнмана . . . . .	387
7.4.2. Методы перенормировки . . . . .	393
7.4.3. Метод Рытова . . . . .	399
7.4.4. Приближение геометрической оптики . . . . .	400
7.4.5. Равномерное разложение на каустике . . . . .	403
7.4.6. Метод сглаживания . . . . .	407
Упражнения . . . . .	409
Список литературы . . . . .	413
Предметный указатель . . . . .	447